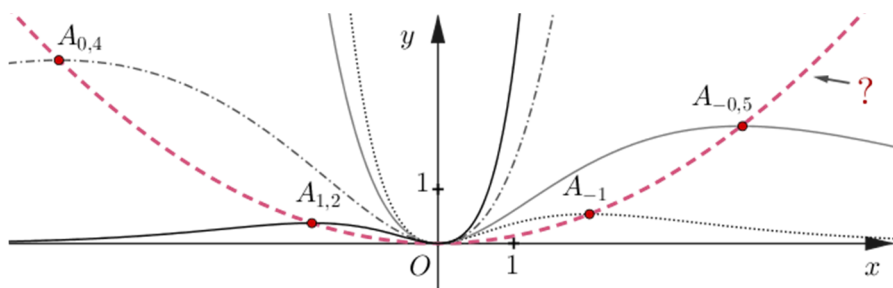


► **R08** a est un paramètre réel non nul, pour tout réel x on pose : $f_a(x) = x^2 e^{ax}$, (C_a) est la courbe représentative de f dans un repère orthogonal, f_a admet un minimum local et un maximum local, l'un atteint en zéro, l'autre atteint en x_a et valant y_a . On note A_a le point de (C_a) d'abscisse x_a : étudier la disposition des points A_a , $a \in \mathbb{R}$.

On a représenté ci-dessous les courbes (C_a) pour trois valeurs particulières de a ainsi que les points A_a pour ces valeurs de a :



Corrigé

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_a(x) = x^2 e^{ax}$.

Rappels : $(uv)' = u'v + v'u$ et $(e^u)' = u'e^u$

$$f_a'(x) = 2xe^{ax} + x^2 ae^{ax}$$

$$f_a'(x) = xe^x(2 + xa)$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $x(ax + 2)$.

Or, $x(ax + 2)$ s'annule en changeant de signes pour $x = 0$ et pour

$$x = -\frac{2}{a} \text{ donc : } x_a = -\frac{2}{a}.$$

$$\text{On a : } y_a = f_a(x_a) = x_a^2 e^{a x_a} = \left(-\frac{2}{a}\right)^2 \times e^{a \times \left(-\frac{2}{a}\right)} = \frac{4}{a^2} e^{-2}.$$

De $x_a = -\frac{2}{a}$ on obtient : $ax_a = -2$ puis : $a = -\frac{2}{x_a}$, puis en remplaçant dans l'expression de y_a :

$$y_a = \frac{4}{\left(\frac{2}{x_a}\right)^2} e^{-2} = \frac{4}{\frac{4}{x_a^2}} \times e^{-2} = 4 \times \frac{x_a^2}{4} \times e^{-2} = \frac{1}{e^2} x_a^2$$

$$y_a = \frac{1}{e^2} x_a^2$$

donc les points A_a appartiennent à la parabole d'équation $y = \frac{1}{e^2} x^2$.